物理数学Ⅰ　演習問題

第 4 章

1. 次の関数に対して偏微分係数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$、および$grad\left(z\right)$を求めなさい。

（1）$z = e^{-(x+y)}$　（2）$z = \dfrac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$　（3）$z = \dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

（4）$z = \sqrt{1+ax^2+by^2}$

2. 次の関数について $gradU$ を求めなさい。

（1）$U = \dfrac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

（2）$U = \dfrac{q}{\sqrt{x^2+\left(y-a\right)^2+z^2}} - \dfrac{q}{\sqrt{x^2+\left(y+a\right)^2+z^2}}$

3. 次の曲面について、位置$\left(x,0\right)$において x 軸方向、y 軸方向、および x 軸から 45° 方向への傾きを求めなさい。また、位置(1,1)での最大傾斜方向を求めなさい。

（１）$z = e^{-\left(x^2+4y^2\right)}$　（２）$z = x^2+4y^2$

4. 空間の各場所でベクトルが定義されているとき、これを**ベクトル場**と呼ぶ。これに対して、空間の各場所でスカラーが定義されているとき、これを**スカラー場**と呼ぶ。上記も問題で登場した様々な関数はスカラー場の例である。

任意のベクトル場　$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}$　に対して、$\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$　を作ると、空間座標の関数としてのスカラー量である。これを　$div\mathbf{E}$　と書く。つまり、$div\mathbf{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$ であり、div をダイバージェンス(divergence)あるいは発散と呼ぶ。次のベクトル場の div を求めなさい。

（１）$\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$　（２）$\mathbf{B} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$　（３）$\mathbf{C} = e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} + e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}$

（4）$\mathbf{B} = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}$

5. 問題 2 の関数について、$div\left(gradU\right) = 0$ 　となることを検証しなさい。

6. あるベクトル場 　$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}$ 　に対して、

$\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$ 　を作ると、これは別のベクトル場を与える。これを、ベクトル $\mathbf{E}$ のローテーションあるいは回転（rotation）とよび、$rot\mathbf{E}$ 　と書く。

つまり、　$rot\mathbf{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$ 　である。

上記の問題 4 の各ベクトル場に対して、rot を求めなさい。